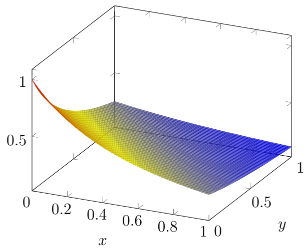
Intégrales doubles, triples et curvilignes

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Intégrales multiples

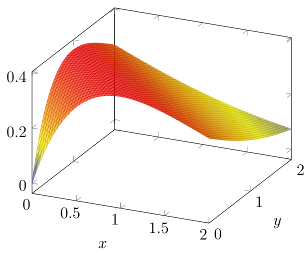
Exercice 1.* Soit $D = [0,1]^2$. Calculer : $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$.



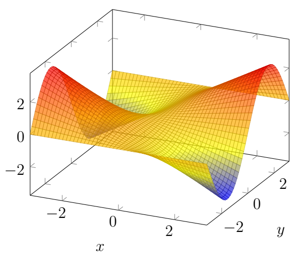
Exercice 2. Calculer l'intégrale $\iint_D e^{x^2} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

Exercice 3. Calculer les intégrales multiples suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

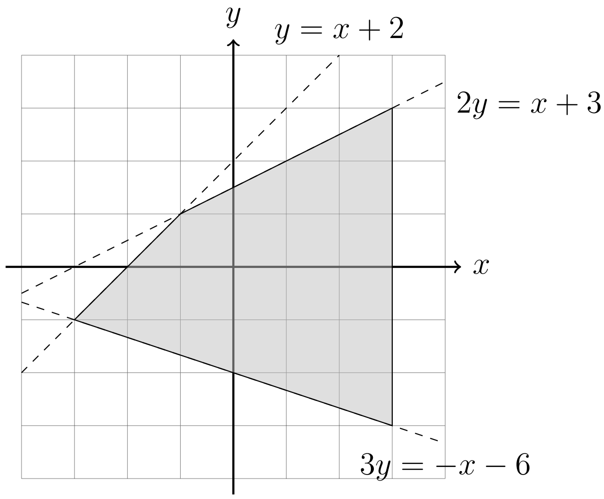


2. $I_2 = \displaystyle\iint_D x \sin y\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \cos y\}$. Dessiner !



Exercice 4. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$. Calculer : $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$.

Exercice 5. Calculer l'aire de la région grisée de la figure suivante :



2 Changement de coordonées

Exercice 6. En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$; $f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq z \leq h\}$ avec $h > 0$; $f(x, y, z) = z$;
3.* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$; $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$.

Exercice 7. Soit $R > 1$. On considère le domaine du plan

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0 \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0, \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

1. Représenter graphiquement le domaine $\mathcal{D}$.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{D}$ (on suppose que $\mathcal{D}$ est de densité uniforme).
3. À partir de quelle valeur de R le centre de gravité appartient à $\mathcal{D}$?

Exercice 8. Calculer le volume :

1. du solide en dessous du cône $C : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et au dessus de la couronne $A : z = 0$ et $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$. Dessiner !
2.* du solide qui est à la fois à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2 = 4$ et de l'ellipsoide $4x^2+4y^2+z^2 = 64$. Dessiner !

Exercice 9.* (Intégrale de Gauss) Soit $R > 0$, $D_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2, x > 0, y > 0\}$ et $K_R = [0, R]^2$.

1. Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

2. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\, dt$.

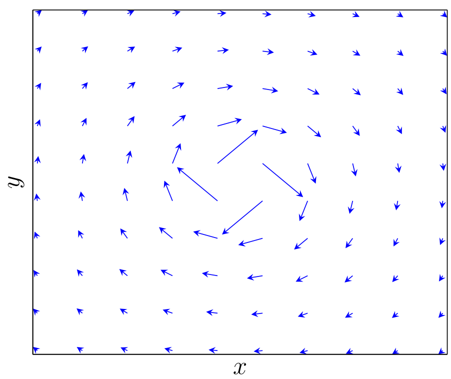
3 Champ de gradient

Exercice 10. Soit $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$ deux points du plan. On considère le champ de vecteurs $V(x, y) = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2)$ défini sur $\mathbb{R}^2$:

1. Exprimer l'intégrale curviligne de V le long du segment reliant les points A et B (orienté de A vers B), puis calculer cette intégrale.
2. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui satisfait $\nabla f = V$.
3. Calculer alors l'intégrale curviligne de V le long de la courbe Γ de paramétrisation $\phi : t \to (\cos^5(t), \sin^4(t))$, $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 11. Calculer la circulation du champ de vecteur $F(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 12. On considère le champ de vecteurs $V(x, y) = (-y, x)\frac{1}{x^2+y^2}$.



1. Quel est le domaine de définition de V ?
2. Calculer la circulation du champ de vecteurs V le long du cercle unité parcouru dans le sens direct.